T. Kondoの交代群の特徴づけについて (有限群の研究)

原田, 耕一郎

数理解析研究所講究録
54巻 1968年 50-61

T. Kondo の交代群の特徴づけについて

名大理　　原田耕一郎

1950年代のなかばに R. Brauer によって、知られている単純群を それに含まれている位数2の元の中心化群によって特徴づけようという問題が提出された。その直接の動機は次の定理（Brauer－Fowler）によるものと思われる。

定理A. 位数2の元の中心化群を与えれば、単純群は有限個に定まる。

この定理の他に 位数2の元は 取扱いやすい性質をいくつかもっている。そのひとつに次の事実がある。すなわち、2個の位数2の元をある有限群のなかからえらんだとき、その2個の元は2面体群という簡単な群を生成する。一般に、位数p（素数）を位数とする元を2個とってきても、類似の性質は成立しないばかりでなく 群全体を生成してしまうことも多い。上の性質の他に、R. Brauer によって発展された、

modular 指標の理論，鈴木通夫による例外指標の理論が，位数2の元を中心にした議論（あいまいな言い方だが）に有効なことが多い。

現在までに，4次元以下の古典線型群の全部または一部，鈴木の群，Janko の群，Mathieu 群の一部，8次以下の交代群等が，Brauer，鈴木，Janko，Wong，Held，Pham 等によって特徴づけられている。Ree の単純群に対しては最終的な結果は得られていないが，Thompson によって，ほとんど，特徴づけられている。なお次元の高い古典線型群の特徴づけには，Tits の B.N-pair による特徴づけに帰着させる論法がよく使われている。

次数の高い交代群の特徴づけには，上の論法はほとんど役に立たないので，別の方法を見つける必要がある。D. Held は，そこで，A_8，A_9，A_{10} の特徴づけに交代群の生成元とその基本関係式にもとづいた方法をとった。この方法は画期的であり，これを発展させて，Yamaki によって，$A_{12} \sim A_{15}$ が，さらに Kondo によって，一般の次数の交代群が特徴づけられるに至った。

次に D. Held の方法を説明したい。先ず交代群 A_n の生成元と基本関係について少し記しておく

$$A_m = \langle E_1, E_2, \qquad , E_{m-2} \rangle$$

$$(*) \quad E_1^3 = E_2^2 = \cdots = E_{m-2}^2 = 1 \ , \ (E_i E_{i+1})^3 = 1 \ (\ 1 \le i \le m-3),$$

$$(E_i E_j)^2 = 1 \quad (\ 1 \le i, j \le l-2 \ , \ |i-j| > 1).$$

具体的には、

$$E_1 = (123) \ , \ E_2 = (12)(34) \ , \ E_3 = (12)(45) \ \cdots\cdots$$

$$E_{m-2} = (12)(m-1, m)$$

とおいてみれば上の関係式を満たしている。 Heldの考えは群Gに単純性（実際にはもう少し弱いが）と Gの Sylow 2-部分群の中心の位数2の元の中心化群を、交代群のそれと同型に与えて、Gの中に、関係式(*)を満たす元 $\tilde{E}_1, \cdots \tilde{E}_{m-2}$ をえらび出そうというのである。そのために先ず次のことに注意したい。

$$N_{A_m}(\langle E_1 \rangle) \ni E_1, E_3, E_4, \cdots\cdots E_{m-2} \ .$$

すなわち $\langle E_1 \rangle$ の正規化群は、生成元のうち E_2 をのぞいてすべてもっている。ゆえに、もし群Gの中に Am の 3-cyclic に対応する元が発見できて、その正規化群が Am のそれと同型であるいうことが証明されれば、$\tilde{E}_1, \cdots \tilde{E}_{m-2}$ のうち $\tilde{E}_2$ をのぞけばすべて自然にえらびだすことができる。しかもそれらは関係式(*)を満たしている。そこで、

別の方法でえらんだ $\tilde{E}_2$ といま定まった $\tilde{E}_1, \tilde{E}_3, \cdots \tilde{E}_{m-2}$ がうまく(*)を満たすようにあれば、証明はできたことになる。実際、Heldはそのようにするのである。しかし、議論は容易なものではなく、$\tilde{E}_1$ と $N_G(\langle\tilde{E}_1\rangle)$ を決定するのには Gの位数2の元の共役性の状態を明らかにする必要がある。位数2の元の共役性を調べるのに、Heldはいろいろと複雑な議論を重ねているが、Kondoによってこれはかなり簡明なものになっている。なお、$N_G(\langle\tilde{E}_1\rangle)$ を決定する前に、$C_G(\tilde{E}_1)$ を決めるのであるが、A_{10} の特徴づけにおいては、鈴木の A_7 の特徴づけが使用されて $C_G(E_1) \cong Z_3 \times A_7$ をうる。さて、Heldの A_{10} の特徴づけを読んで、Kondoはその論法が少し修正するだけで A_{11} の特徴づけになることを見出した。この場合は A_8 の特徴づけがすでにWongによってできていることが重要な役割をする。さらに、Kondoは一般の次数の交代群の特徴づけはどうしたら得られるかという問題を考察して次の定理を得た。定理を述べる前に次の定義をする。

$$\pi_i = (4i-3,\ 4i-2)(4i-1,\ 4i) ,$$

$$\alpha_i = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \cdots \cdot \pi_i ,$$

$$1 \le i \le n , \quad m = 4n+r , \quad 0 \le r \le 3 .$$

すぐわかるように $\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ が、A_mの位数2の元の共役類の代表元となっている。

定理B. Gを有限群とし n個の位数2の元 $\tilde{\alpha}_1, \dots \tilde{\alpha}_n$を含むものとせよ。さらに

(i) $S = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{A_m}(\alpha_i)$ から $\tilde{S} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_G(\tilde{\alpha}_i)$ への 1:1 かつ上への写像 φが存在し

(ii) φは各iに対して $C_{A_m}(\alpha_i)$ から $C_G(\tilde{\alpha}_i)$ への同型写像をひきおこす。

このとき、GはA_mに同型である。

証明は次のように行う。先ず $\tilde{E}_1$をきめることであるが、これは $C_{A_m}(\alpha_1)$ が 3-cycle $(4n-3, 4n-2, 4n-1)$ を含むから $\tilde{S}$は 3-cycle に対応する元を含む。それを$\tilde{S}$の元で適当に共役をとると $\tilde{E}_1$が定める。$C_G(\tilde{E}_1)$ は 定理がmより小さい値に対しては成立しているという帰納法を使って定まる。$N_G(\langle\tilde{E}_1\rangle)$もすぐきめって $N_G(\langle\tilde{E}_1\rangle)/\langle\tilde{E}_1\rangle \cong S_{m-3}$ となる。そこで $\tilde{E}_1, \tilde{E}_3, \dots \tilde{E}_{m-2}$ をきめればよいのであるが、実際は簡単なことではない。Held の考えの概略を述べた時は、自然にとると書いたが、これはあいまいな表現であった。なぜなら 自然なとり方にもいろいろあるからである。そこ

で、証明では次のようにする。先ず $\tilde{E}_2$ と $\tilde{E}_1, \tilde{E}_3 \cdots \tilde{E}_{m-3}$ の一部を関係式(B)を満たすように前もってえらんでおく。そしていくつかの元を $N_G(\langle\tilde{E}_1\rangle)$ の中からえらんで、全部の生成元を得ようというわけである。そのことが可能なるためには、前もってえらんだ $\tilde{E}_3 \cdots \tilde{E}_{m-3}$ の一部が $N_G(\langle\tilde{E}_1\rangle)/\langle\tilde{E}_1\rangle \cong S_{m-3}$ の互換となる必要がある。このことを言うのが、証明の本質的なところである。A_{10}, A_{11} 等では $m-3=7, 8$ となって、S_{m-3} の互換であるかないかは少しの議論と観察によってわかるが一般の場合はそのようにうまくゆかない。次のは Nagao による補題である。

補題 C. S_ℓ を ℓ 次の対称群とせよ。Y を S_ℓ の部分群で次の形をもつものとせよ。

$$Y = S^{(1)} \times S^{(2)} \times \cdots \times S^{(\ell')} \times S^{(\ell'+1)}$$

ここで各 i $(1 \le i \le \ell')$ について $S^{(i)} \cong$ 4次の対称群

$S^{(\ell'+1)} \cong k$ 次対称群で k は $0, 1, 2$ または 3.

さらに次の条件をみたすとせよ。

(1) $\ell - 1 = 4\ell' + k$ $\qquad \ell \neq 6, 7$.

(2) $S^{(i)}$ は X の中で $S^{(1)}$ に共役 $(1 \le i \le \ell')$

$S^{(\ell'+1)}$ は X の中で $S^{(1)}$ の部分群に共役

(3) 各 i $(1 \le i \le \ell'+1)$ について $S^{(i)} \not\subset A_\ell$.

このとき、YはS_ℓに自然に埋め込まれたものに限る。

この補題と与えられた位数2の元がS_{m-3}の互換であるということの証明との関係をのべるには、まだこまかい事を言わねばならないので省略する。このようにして $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2 \cdots \tilde{E}_{m-2}$ が(*)をみたすように定まり、GがA_mに同型な部分群を含むことがわかる。G自身がA_mに同型になることは、容易である。さて、上の定理によって一般の次数に対するA_mの特徴づけは第一歩ができたわけである。そこでただ一個の位数2の元の中心化群によってA_mを特徴づけるには、与えられた群Gの単純性と中心化群の構造から、Gの位数2の元の共役類をきめ、その代表元の中心化群をきめ、さらにそれらが定理の条件を満足するように決定できればよいわけである。しかし、定理の条件はいかにも強く、そのような設定を作りだすことは非常に困難に思える。Kondoによって特徴づけ(一個の位数2の元の中心化群を与えるだけの)の一般化が進められている時Yamakiによって、A_{14}, A_{15}の一個の位数2の元の中心化群による特徴づけ、A_{12}, A_{13}のそれよりやや強い条件による特徴づけがなされた。その中で、Yamakiは位数2の元の共役性を調べるのにうまい方法を見出した。その方法はKondoの一般化に寄与するところが

大きい。そして Kondo の二論文「On finite groups with a 2-Sylow subgroup isomorphic to that of the symmetric group of degree 4n」「On the alternating groups II」によって一般化がなされたのである。ただし交代群 A_m において $m \equiv 0$ or $1 \pmod 4$ の場合は一位の位数2の元の中心化群だけでなく、かなり強い条件を課したものになっている。実際 $m=12, 13$ の場合は、A_m の Sylow 2-部分群の中心の位数2の元の中心化群を与えても群はきまらない。$Sp(6,2)$ は A_{12} と Sylow 2-部分群の中心の位数2の元の中心化群は同じ構造をもっている。mが大きければ、このようなことはないだろうが、克明に古典群を調べたわけではないと Kondo は言っている。

さて、Kondo の一般化の証明について一言記すことにする。もちろんくわしく述べるわけにはいかない。先ず、前に述べた α_n が A_m の Sylow 2-部分群の中心に入っていることに注意する。我々は単純群 G とその Sylow 2-部分群の中心の元 $\tilde{\alpha}_n$ を与える。そして $C_G(\tilde{\alpha}_n)$ と $C_{A_m}(\alpha_n)$ が同型であると仮定する。このとき、G と A_m が同型であるといいたいわけである。

$C_{A_m}(\alpha_n)$ は $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ を含んでいるから 同型対応

によって対応する $C_G(\tilde{\alpha}_n)$ の元を $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots \tilde{\alpha}_{n-1}$ とする。次の定義をおく。

定義. Gの元 x が Gの中で $\tilde{\alpha}_i$ に共役なとき x は長さ i の元であるという。 $(1 \leq i \leq n)$.

この定義が well defined であるためには、$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \cdots, \tilde{\alpha}_n$ のどの2個もG中共役になりえないことを言う必要がある。すでにここで、$m \not\equiv 0, 1 \pmod 4$ を仮定する必要がある。$m \not\equiv 0, 1 \pmod 4$ のときは A_m の Sylow 2-部分群 S の極大可換部分群で位数4の元をもたないもの全体から生成された部分群は、位数8の二面体群のいくつかの直積になる。この群を $J(S)$ とおいて $J(S)$ の性質を使って、位数2の元の共役性を調べるのである。ところが $m \equiv 0, 1 \pmod 4$ のときは同じようにして作った $J(S)$ が基本Abel群になってしまって いわば簡単すぎてつかみどころのない群になってしまう。そういうわけで $m \not\equiv 0, 1 \pmod 4$ とする。このとき、$J(S)$ は S の weakly closed な部分群となって $J(S)$ の中心の元の共役性は $J(S)$ の正規化群の中での共役性によって定まる、という便利な事実が成立し、$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \cdots \tilde{\alpha}_{n-1}, \tilde{\alpha}_n$ が $J(S)$ の中心に入るように S をえらんでおくことができる等のことから、定義が well defined であることが証明さ

れる。この長さなる考え方は、位数2の元の共役性を調べるのに支配的なもので、たくみに解析が行なわれてゆく。最終的には $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots \tilde{\alpha}_n$ が G の位数2の元の共役類の代表であることが証明され　その共役性がどのような元で行なわれるかということもくわしくわかる。たとえば 3-cycle (123) は $(12)(34)$, $(14)(23)$, $(13)(24)$ を

$$(12)(34) \longrightarrow (14)(23) \longrightarrow (13)(24)$$

のように共役で移す。$C_{A_m}(\alpha_n)$ は上の3個の位数2の元を含むから $C_G(\tilde{\alpha}_n)$ も対応する元 $\widetilde{(12)(34)}$, $\widetilde{(14)(23)}$, $\widetilde{(13)(24)}$ を含む。(123) は $C_{A_m}(\alpha_n)$ に含まれていないから $\widetilde{(123)}$ は定義できない。ところが、解析を進めてゆくと、ちょうど (123) と同じ働きをする元 x が群 G の中に存在することがいえるのである。すなわち $\widetilde{(123)}$ が定義できたのと同じことになるのである。前に A_m の特徴づけにおいて 3-cycle に対応する元を見つけることが証明の核心になると述べたが　ここにそれが得られたわけである。この後　定理Bを応用できるような設定にもってゆくわけだが　これまた　多くの計算を要する。A_m をモデルにして一歩一歩それに近づけることによって、設定が可能となって定理が証明される。後半の部分を説明するのは、ここではむずかしいので原論文を参照されたい。 Kondo の論文を読んで、すぐ気がつくことは、交代

群の特徴づけにおいて帰納法がよく使われていることであろう。一般の無限系列の単純群についてそうような可能性を追求してみるのは興味あることかもしれない。しかし、ほとんど不可能に思える。交代群において帰納法が使えたということと、交代群がその次数の置換表現をもつということは不可分のようであるからである。

なお $m \equiv 0, 1 \pmod 4$ については、Kondo は、はじめから $\widetilde{(123)}$ の存在を仮定しておく。これは、重要な仮定であるので、この場合には特徴づけの条件をもっと弱くする可能性が残されているといえる。にもかかわらず、この Kondo による交代群の特徴づけは、現在までになされてきた単純群の特徴づけの中でひとつの頂点をなす仕事であると思う。

参考文献

[1] D. Held, A characterization of the alternating groups of degree eight and nine, J. of Alg. 7 (1967).

[2] ——, A characterization of some multiply transitive permutation group, (to appear)

[3] T. Kondo, On a characterization of the alternating group of degree eleven (to appear)

[4] ———, On the alternating groups (to appear).

[5] ———, On finite groups with a 2-Sylow subgroup isomorphic to that of the symmetric group of degree $4n$, (to appear).

[6] ———, On the alternating groups II, (to appear).

[7] M. Suzuki, On finite groups containing an element of order four which commutes only with its powers, Ill. J. 3 (1959).

[8] H. Yamaki, A characterization of the alternating groups of degrees 12, 13, 14, 15 (to appear).

[9] W. J. Wong, A characterization of the alternating group of degree eight, Proc. L. Math. (1963).

附記. 最近 Kondo は $m \equiv 0, 1 \pmod 4$ の場合についても，ひとつの involution の中心化群で交代群を特徴づけることに成功した。